حساب المساحات

تعتبر عملية حساب المساحات من الأمور المهمة في شتى المجالات وليس في تخصص المساحة فقط . وتتوقف دقة نتائج حساب المساحات على عدة عوامل منها :

١ ـ دقة القياس في الطبيعة سواء كانت مسافات أو زوايا .

٢ ـ دقة الرسم (في حالة حساب المساحة من شكل مرسوم) .

٣ ـ الطريقة المتبعة في حساب الشكل .

مصادر تقدير المساحات :

١ ـ من الطبيعة .

٢ ـ من الخرائط .

طرق إيجاد المسافات :

١ ـ الطرق الحسابية : وهي أدق الطرق وفيها يقسم الشكل إلى أشكال منتظمة مثل المثلثات وتطبق قوانين الأشكال المنتظمة عليه .

٢ ـ الطرق نصف الحسابية : وفيها يقسم الرسم إلى شرائح وتطبق عليه قوانين خاصة .

٣ ـ الطرق الميكانيكية : وهي تعتمد على استخدام الأجهزة مثل جهازالبلانيمتر

مساحة الأشكال المنتظمة :

مساحة المثلث : Area of Traingle

ويتم ذلك عن طريق ثلاث طرق :

طريقة القاعدة والارتفاع :

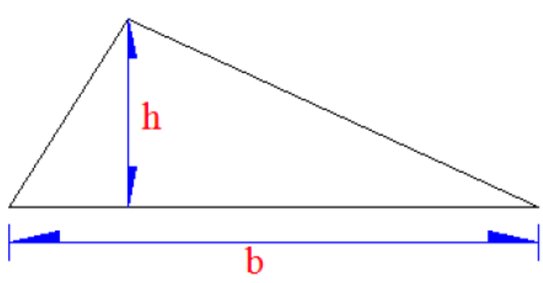
$$\text{Area} = \frac{bh}{2}$$

حيث :

Area : المساحة .

b : القاعدة (Base) .

h : الارتفاع (Height) .



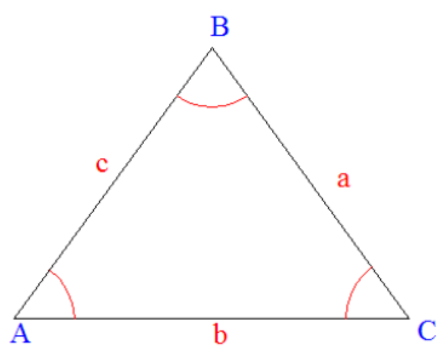
مساحة المثلث بدلالة القاعدة و الارتفاع

مثال : احسب مساحة المثلث إذا كان طول قاعدته 4.5 m وطول ارتفاعه 2.7 m ؟

الحل :

$$\text{Area} = \frac{bh}{2} = \frac{4.5 \times 2.7}{2} = 6.075 \quad m^2$$

مساحة المثلث بطريقة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما :



مساحة المثلث بدلالة ضلعين و الزاوية المحصورة

$$\text{Area} = \frac{1}{2} ab \quad \sin \ C$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} ac \quad \sin \ B$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} bc \quad \sin \ A$$

حيث:

a,b,c : أطوال أضلاع المثلث كما هو بالشكل

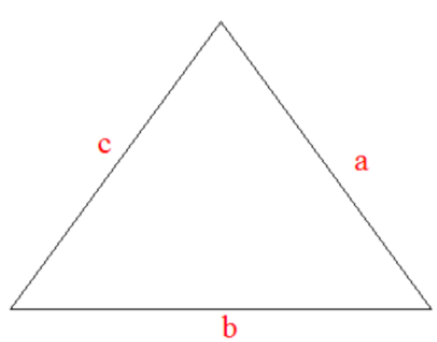
A,B,C : زوايا المثلث كما هو بالشكل

مثال (٥ . ٢) : احسب مساحة المثلث إذا علمت أن طول الضلعين b , c هو 17.51 m و 15.22 m على التوالي والزاوية التي بينهما $22° \ 15' \ 14''$ ؟

الحل :

$$Area = \frac{1}{2} bcSinA = \frac{1}{2} \times 17.51 \times 15.22 \sin \quad 22° \quad 15' \quad 14'' = 50.464 - m^2$$

طريقة الأضلاع الثلاثة :



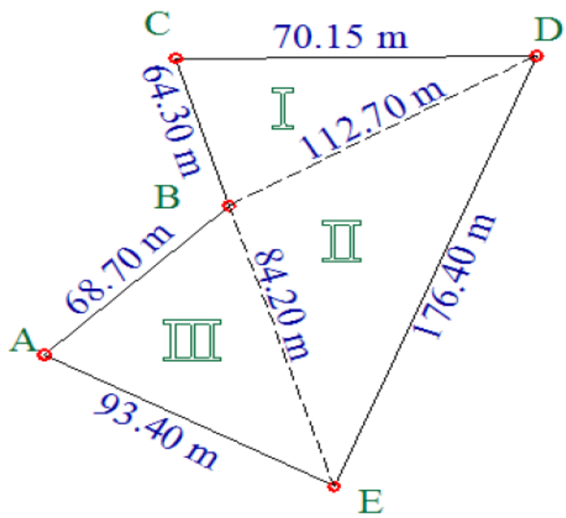
مساحة المثلث بدلالة أضلاعه الثلاثة

$$Area = \sqrt{s(s- a)(s- b)(s-c)}$$

حيث:

$$S = \frac{(a+b+c)}{2}$$

مثال : أوجد مساحة قطعة الأرض بالشكل ؟



الحل :

قسمنا قطعة الأرض كما بالشكل إلى ثلاثة مثلثات هي : I ، II ، III

Area of I

$$S = \frac{70.15 + 64.30 + 112.70}{2} = 123.575 \quad m$$

$$Area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$Area = \sqrt{123.575(123.575-70.15)(123.575-112.70)(123.575-64.30)}$$

$$Area = 2062.947 \text{ m}^2$$

Area of II

$$S = \frac{176.40 + 84.20 + 112.70}{2} = 186.65 \quad m$$

$$Area(II) = \sqrt{186.65(186.65-176.40)(168.65-84.20)(186.65-112.70)}$$

$$Area(II) = 3807.159 \text{ m}^2$$

Area of III

$$S = \frac{84.20 + 93.40 + 68.70}{2} = 123.15 \quad m$$

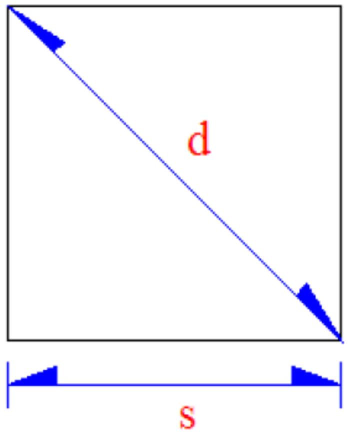
$$Area\ (III) = \sqrt{123.15(123.15-84.20)(123.15-93.40)(123.15-68.70)}$$

$$Area\ (III) = 2787.490 \text{ m}^2$$

$$Total\ Area = I+II+III = 2062.947+3807.159+2787.490$$

$$= 8657.596 \text{ m}^2$$

مساحة المربع : Area of square



إيجاد مساحة المربع

$$\boxed{\text{Area} = S^2 = \frac{d^2}{2}}$$

حيث:

s : طول ضلع المربع .

d : طول القطر .

مثال : أوجد مساحة المربع إذا علمت أن طول ضلعه 12m ، ثم أوجد طول القطر بدلالة المساحة

الحل :

$$\text{Area} = S^2 = (12)^2 = 144 \text{ m}^2$$

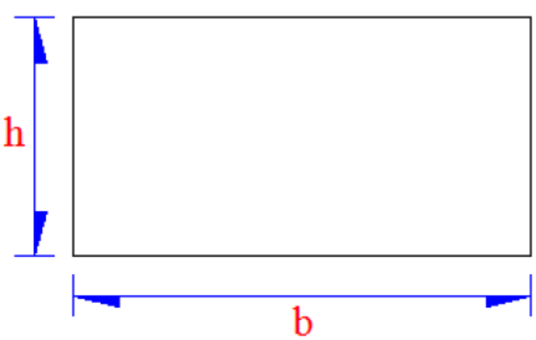
$$\text{Area} = \frac{d^2}{2} \Rightarrow d^2 = 2\text{Area}$$

$$\therefore d = \sqrt{2\text{Area}}$$

$$= \sqrt{144 \times 2}$$

$$= 16.97 \text{ m}$$

مساحة المستطيل : Area of rectangle



مساحة المستطيل

$$\boxed{\text{Area} = bh}$$

حيث:

b : الطول .

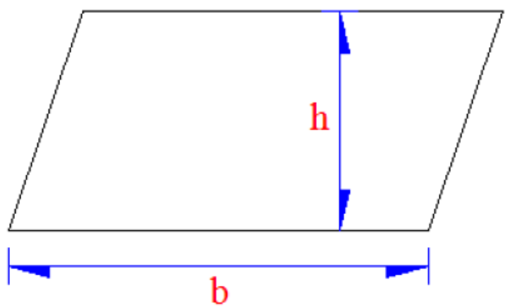
h : العرض .

مثال أرض زراعية مستطيلة الشكل طولها 787 m وعرضها 427 m . أوجد مساحة الأرض ؟

الحل :

$$\text{Area} = bh \quad = 787 \times 427$$
$$= 336049 \ m^2$$

مساحة متوازي الأضلاع : Area of parallelogram



مساحة متوازي الأضلاع

$$\boxed{\text{Area} = bh}$$

حيث :

b : القاعدة .

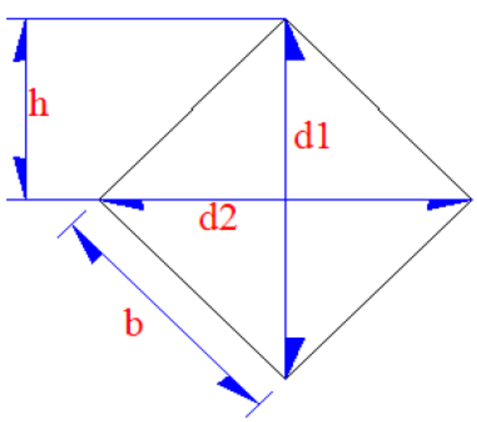
h : الارتفاع .

مثال : متوازي مستطيلات طول قاعدته 58 m وارتفاعه 22 m . أوجد مساحته ؟

الحل :

$$\text{Area} = bh \quad = 58 \times 22$$
$$= 1276 \ m^2$$

مساحة المعين : Area of rhombus



مساحة المعين

$$\boxed{\text{Area} = bh = \frac{d_1 d_2}{2}}$$

حيث :

b : القاعدة .

h : الارتفاع .

d_1: طول القطر الأول .

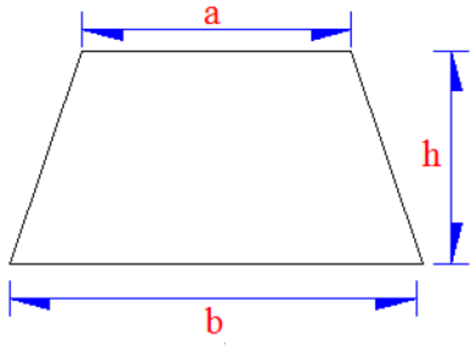
d_2 : طول القطر الثاني .

مثال : أوجد مساحة معين إذا علمت أن طول قطريه 17 m , 21 m على التوالي ؟

الحل :

$$\text{Area} = \frac{d_1 d_2}{2}$$
$$= \frac{17 \times 21}{2} = 178.5 \quad m^2$$

Area of trapezoid مساحة شبه المنحرف :



مساحة شبه المنحرف

$$\boxed{\text{Area} = \frac{1}{2}h(b+a)}$$

حيث

h : الارتفاع .

b : القاعدة الأولى .

a : القاعدة الثانية .

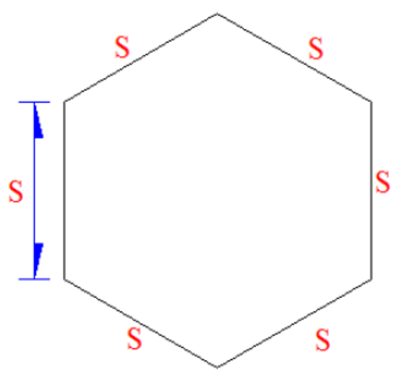
مثال أوجد مساحة شبه المنحرف إذا علمت أن ارتفاعه 7 m وطول قاعدتيه 24 m ، 14 m على التوالي ؟

الحل :

$$\frac{1}{2}h(b+a)\text{Area} = \; = \frac{1}{2}\times 7(24+14)$$

$$= 133 \text{ m}^2$$

Area of regular polygon مساحة المضلع المنتظم



مساحة المضلع المنتظم

$$\boxed{\text{Area} = \frac{1}{4}ns^2 \cot\frac{180}{n}}$$

حيث :

n : عدد أضلاع المضلع المنتظم .

s : طول الضلع .

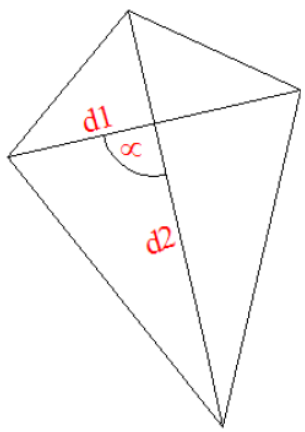
مثال : مثمن طول ضلعه 9m أوجد مساحته ؟

الحل :

$$\text{Area} = \frac{1}{4}ns^2 \cot\frac{180}{n} \; = \frac{1}{4}\times 8\times 9^2 \cot\frac{180}{8}$$

$$= 391.10 \text{ m}^2$$

مساحة الشكل الرباعي . Area of Quadrilateral



مساحة الشكل الرباعي

$$\boxed{Area = \frac{d_1 d_2 \quad \sin\alpha}{2}}$$

حيث إن :

d_1 : طول القطر الأول .

d_2: طول القطر الثاني

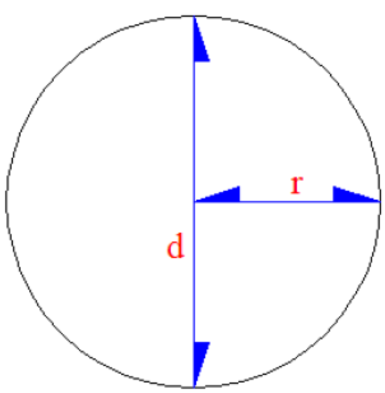
∝ : الزاوية المحصورة بين القطرين .

مثال : أوجد مساحة الشكل إذا علمت أن طول قطريه 6.5 m ، 9.6m والزاوية المحصورة بينهما $48^{\circ}\ 12'\ 41''$ ؟

الحل :

$$Area = \frac{d_1 d_2 \quad \sin\alpha}{2} = \frac{6.5 \times 9.6 \quad \sin(84^{\circ} \quad 12' \quad 41'')}{2}$$
$$= 31.04\ m^2$$

مساحة الدائرة Area of Circle



مساحة الدائرة

$$\boxed{Area = \quad \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}}$$

حيث :

r : نصف القطر .

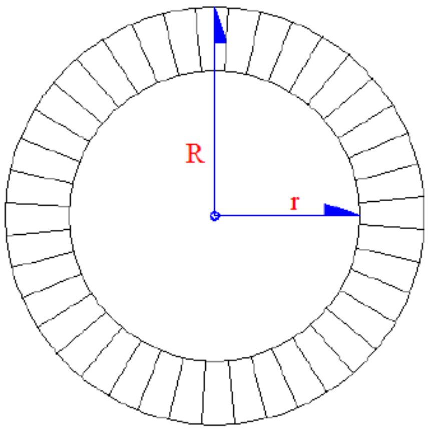
d : القطر .

مثال دائرة نصف قطرها 12m أوجد مساحتها ؟

الحل :

$$\pi r^2 Area = \quad = \pi(12)^2$$
$$= 452.389\ m^2$$

مساحة الحلقة الدائرية .Area of circular Ring



مساحة الحلقة الدائرية

$$\boxed{Area = \pi(R^2 - r^2)}$$

حيث :

r : نصف قطر الدائرة الصغيرة .

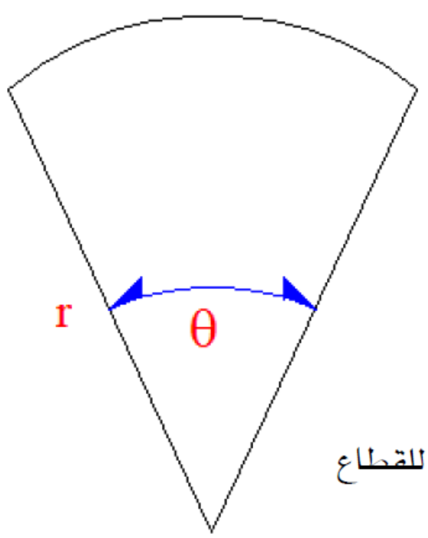
R : نصف قطر الدائرة الكبيرة .

مثال أوجد مساحة الحلقة الدائرية إذا علمت أن نصف قطر الدائرة الداخلية الصغيرة 9m ونصف قطر الدائرة الكبيرة (11 m) ؟

الحل :

$$Area = \pi(R^2 - r^2) = \pi(11^2 - 9^2)$$
$$= 125.66 \quad m^2$$

مساحة القطاع الدائري Area of sector



مساحة القطاع الدائري

$$\boxed{Area = \pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ}}$$

حيث :

θ = الزاوية المركزية للقطاع .

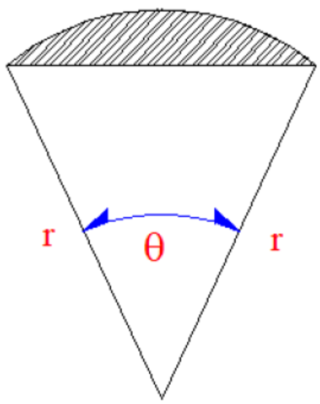
r = نصف القطر .

مثال (٥ – ١٣) : أوجد مساحة القطاع إذا علمت أن الزاوية المركزية للقطاع $34^0 \; 15^{/} \; 27^{//}$ ونصف القطر 17.5 m ؟

الحل :

$$Area = \pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ} = \pi(17.5^2)\frac{34^\circ \; 15' \; 27''}{360^\circ}$$
$$= 91.55 \quad m^2$$

Area of segment مساحة القطعة الدائرية



مساحة القطعة الدائرية

$$\text{Area} = \frac{r^2}{2}\sin\theta - \pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$\text{Area} = r^2\left(\frac{\sin\theta}{2} - \frac{\pi\theta}{360}\right)$$

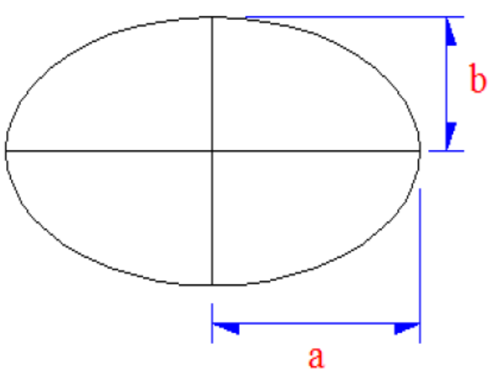
مثال أوجد مساحة القطعة الدائرية إذا علمت أن نصف القطر 8.5m والزاوية المركزية 45° ؟

الحل :

$$\text{Area} = r^2\left(\frac{\sin\theta}{2} - \frac{\pi\theta}{360}\right) = (8.5)^2\left(\frac{\pi \times 45}{360} - \frac{\sin 45}{2}\right)$$

$$= 2.83 \ \ m^2$$

Area of Ellipse مساحة القطع الناقص



مساحة القطع الناقص

$$\text{Area} = \pi ab$$

حيث :

a : نصف القطر الأكبر .

b : نصف القطر الأصغر .

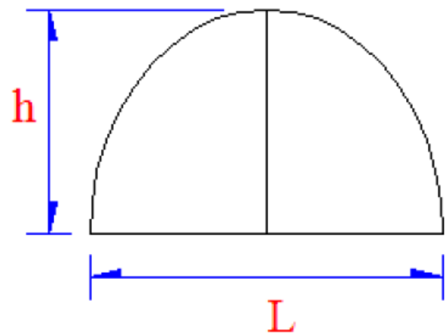
مثال احسب مساحة القطع الناقص إذا كان طول محوره الأكبر 32.5 m والأصغر 28.7 m ؟

الحل :

$$\text{Area} = \pi ab = \pi \times 32.5 \times 28.7$$

$$= 2930.32 \ \ m^2$$

مساحة القطع المكافئ Area of parabola



مساحة القطع المكافئ

$$\boxed{\text{Area} = \frac{2}{3}Lh}$$

حيث :

h : الارتفاع .

L : القاعدة .

مثال احسب مساحة القطع المكافئ إذا كان ارتفاعه 15m وطول قاعدته 24m ؟

الحل :

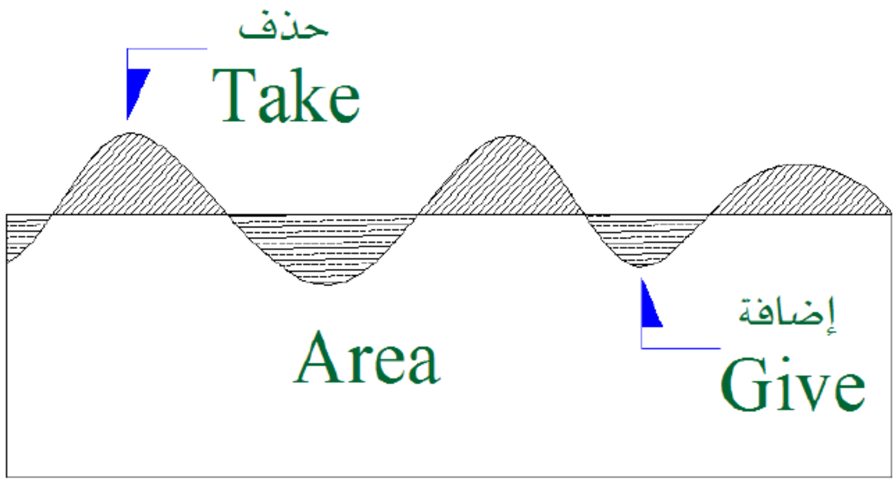
$$\text{Area} = \frac{2}{3}Lh = \frac{2}{3}\times 24\times 15$$
$$= 240 \quad m^2$$

مساحة الأشكال غير المنتظمة (الطرق نصف الحسابية)

يمكن حساب مساحات الأشكال المحددة بمنحنيات غير منتظمة بعدة طرق منها :

طريقة الحذف والإضافة Take and Give method

هذه الطريقة تقريبية وتزداد دقتها كلما قلت تعاريج حدود الشكل ، وفي هذه الطريقة يجري تحويل الخطوط المتعرجة إلى خطوط مستقيمة بحيث يحول الشكل إلى شكل مضلع يكافئه في المساحة على أن تكون الأجزاء المحذوفة مكافئة في المساحة للأجزاء المضافة قدر الإمكان .

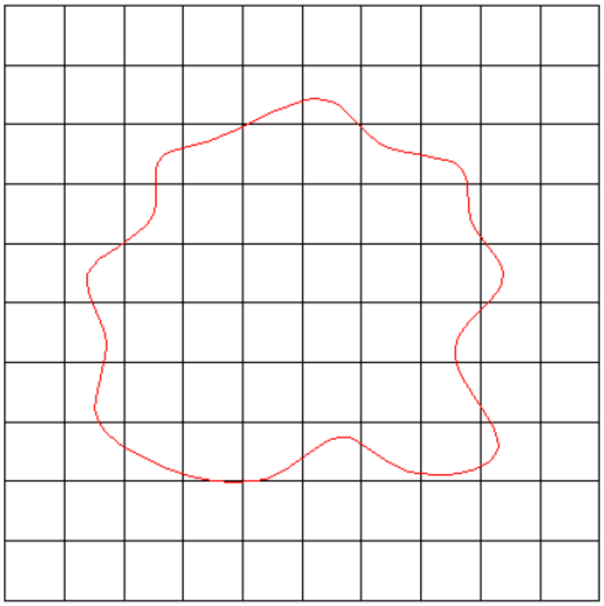


تعيين مساحة الشكل بطريقة الحذف و الإضافة

طريقـــــــــــة المربعـــــــــــات COUNTING SQUARE

في هذه الطريقة يجري تغطية الشكل بورقة شفافة مسطرة إلى مربعات صغيرة ، ثم تعد المربعات الكاملة المحصورة ضمن الشكل ، أما المربعات الداخلة جزئياً ضمن الشكل فتقدر وتضاف إلى عدد المربعات الكاملة ، وتحسب المساحة الكلية بضرب عدد المربعات الكاملة الكلي في مساحة المربع . وتعالج أحياناً المربعات الداخلة جزئياً في مساحة الشكل بإحدى الطريقتين التاليتين :

١. إذا كان أكثر من نصف المربع داخلاً في الشكل فيعتبر مربعاً كاملاً . وإذا كان الجزء الداخل أقل من نصف المربع فيهمل هذا المربع ولا يعد ضمن المربعات الكاملة .
٢. اعتبار كل مربع غير كامل ضمن الشكل مساوياً لنصف مربع كامل .

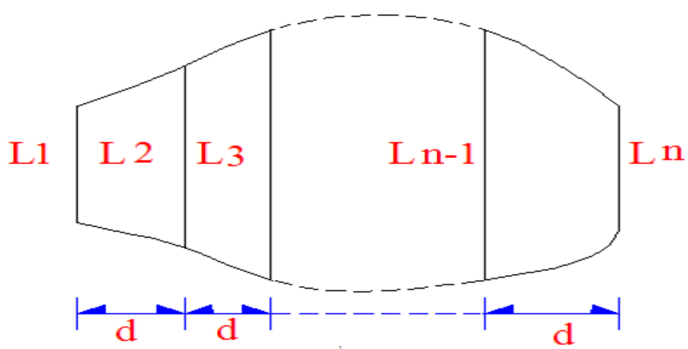


طريقة المربعات في تعيين مساحة الأشكال غير المنتظمة

طريقة أشباه المنحرفات: Trapezoidal rule

وفي هذه الطريقة يتم تقسيم الشكل إلى أشباه منحرفات وتحسب المساحة باستخدام القاعدة الآتية

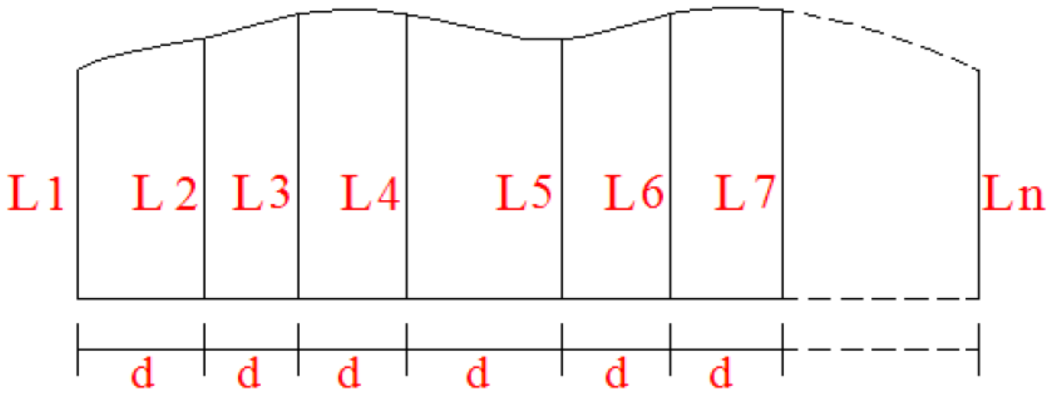
- في هذه الطريقة افترض أن التعرج هو خط مستقيم بين كل عمودين متتاليين .
- هذه الطريقة سهلة وذات دقة مقبولة خاصة إذا كانت حدود الأرض مستقيمة .



طريقة أشباه المنحرفات في إيجاد مساحة الشكل

$$\text{Area} = \frac{d}{2}\left[L1 + 2(L2 + L3 + \cdots \cdots L_{n-1}) + L_N\right]$$

طريقة سمبسون: Simpson's One Third Rule



طريقة قاعدة سمبسون في إيجاد مساحة الأشكال

في هذه الطريقة :

١. يتم تقسيم القاعدة إلى عدد زوجي مناسب من التقسيمات المتساوية ويقاس طول أحدها .

٢. تقاس أطوال الأعمدة التي تقام من نقاط التقسيم بدءً من نقاط التقسيم وحتى نقاط تقاطع هذه الأعمدة مع الحد المتعرج .

٣. تطبق المعادلة الآتية في حساب مساحة الشكل :

$$\text{Area}= \frac{d}{3}[(L_1+L_n)+4(L_2+L_4+L_6+.......)+2(L_3+L_5+L_7+..........)]$$

المساحة = $\frac{\text{طول القسم}}{3}$ [(ضعف مجموع الأعمدة الفردية)+(أربع أمثال مجموع الأعمدة الزوجية)+(مجموع طول العمودين الأول و الأخير)]

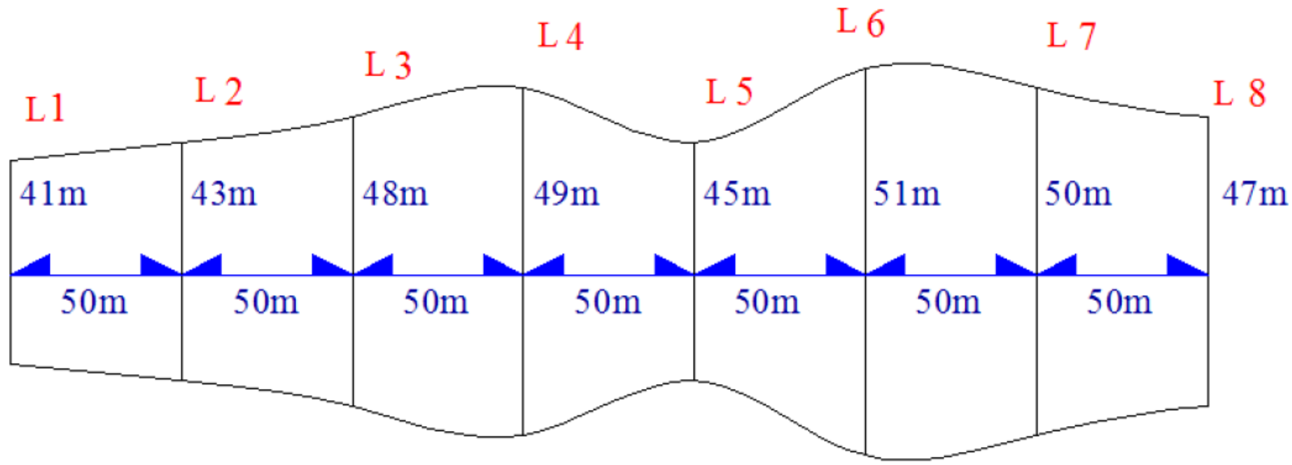
مثال إذا كان عدد المربعات التي تغطي قطعة أرض مرسومة بمقياس رسم 1:2000 تساوي 1980 مربع . وكان طول ضلع المربع على الرسم 0.5 cm . أوجد مساحة الأرض في الطبيعة ؟

الحل :

مساحة الأرض =عدد المربعات × مساحة المربع على الرسم × (مقلوب مقياس الرسم) ٢ .

$$\begin{aligned}\text{Area} &= 1980\times(0.5)^2\times(2000)^2\\ &= 1980\times10^6\ \text{cm}^2\\ &= \frac{1980000000}{10000}\\ &= 198000\ \text{m}^2\end{aligned}$$

مثال : أوجد مساحة قطعة الأرض بطريقة أشباه المنحرفات وبطريقة سمسون ؟



الحل :

طريقة أشباه المنحرفات

$$\text{Area}= \quad [L_1 + 2(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7) + L_8]$$

$$\text{Area} \;= \frac{50}{2}[41+2(43+48+49+45+51+50)+47\,]$$
$$= 16500 \;\; m^2$$

طريقة سمسون :

من الملاحظ أن عدد الأقسام سبعة وهو عدد فردي لذلك نطبق قاعدة سمسون على الأقسام الستة الأولى ونضيف مساحة الجزء الأخير على أنه شبه منحرف .

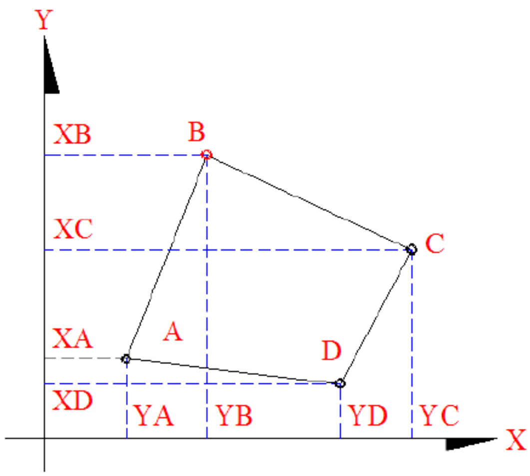
$$\text{Area}= \quad \frac{d}{3}[(L_1 + L_7) + 4(L_2 + L_4 + L_6) + 2(L_3 + L_5)] + [\frac{h(b+a)}{2}]$$

$$\text{Area} = \frac{50}{3}\,[(41+50)+4(43+49+51)+2(48+45)\,]+[\;\frac{50(50+47)}{2}\;]$$
$$= 16575 \;\; m^2$$

إيجاد المساحة بواسطة الإحداثيات Area by Coordinates

لحساب مساحات المضلعات المغلقة ، أوتلك الأشكال التي تكون محصورة ضمن مجموعة من الخطوط المستقيمة (ثلاثة خطوط أو أكثر) وبمعلومية إحداثيات رؤوسها أو أركانها يمكن اتباع طريقة الإحداثيات في حساب مساحة الشكل وذلك على النحو الآتي :

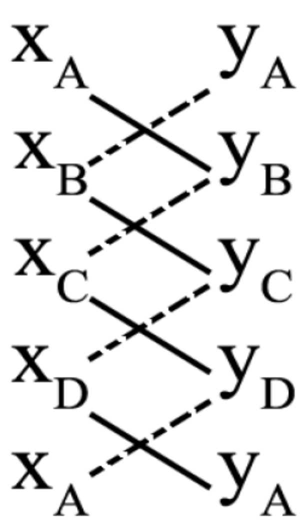
١. ترتب الإحداثيات على الشكل الآتي :



حساب مساحة مضلع مغلق بواسطة إحداثيات رؤوسه

x_A	y_A
x_B	y_B
x_C	y_C
x_D	y_D
x_A	y_A

٢. نوصل خطوطاً متصلة مستقيمة من X النقطة الأولى إلى Y النقطة التي تليها وبخط مستقيم متقطع من Y النقطة الأولى إلى X النقطة التي تليها ويجري ذلك على جميع النقاط كما يلي :



٣. تضرب الإحداثيات الموصلة بخطوط متصلة ببعضها وكذلك نضرب الموصلة بخطوط متقطعة ببعضها البعض كما يلي :

$$\sum 1 = X_A \cdot y_B + x_B \cdot y_C + x_C \cdot y_D + x_D\, y_A$$

$$\sum 2 = Y_A \cdot x_B + y_B \cdot x_C + y_c \cdot x_D + y_D \cdot x_A$$

٤. توجد المساحة من المعادلة الآتية :

$$\boxed{\text{Area} = \frac{\left|\sum_1 - \sum_2\right|}{2}}$$

ملحوظة : يفضل وضع الخطوات السابقة في جدول كما سيأتي في المثال .

مثال : احسب مساحة المضلع المغلق A B C D إذا كانت إحداثيات رؤوسه كالتالي:

STATION	X- COORDINATES	Y- COORDINATES
A	1000	4000
B	6000	8000
C	9000	3000
D	5000	1000

الحل :

POINT	X- COORDINATES	Y- COORDINATES	حاصل ضرب الخطوط المتصلة $\sum_1$	حاصل ضرب الخطوط المتقطعة $\sum_2$
A	1000	4000	1000×8000=8000000	4000×6000=24000000
B	6000	8000	6000×3000=18000000	8000×9000=72000000
C	9000	3000	9000×1000=9000000	3000×5000=15000000
D	5000	1000	5000×4000=20000000	1000×1000=1000000
A	1000	4000	$m^2 \sum_1 = 55000000$	$m^2 \sum_2 = 112000000$

$$\text{Area} = \frac{\left|\sum_1 - \sum_2\right|}{2} = \frac{\left|55000000 - 12000000\right|}{2}$$

$$\text{Area} = 28500000\ m^2 = 28.5\ km^2$$

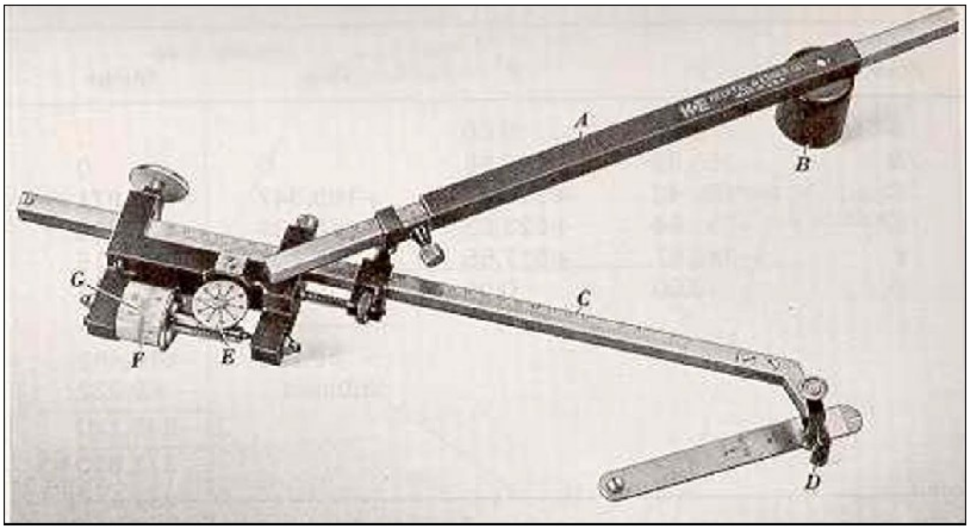
البلانيمتر (الطرق الميكانيكية) Planimeter

كثيراً ما يستخدم جهاز البلانيمتر في قياس مساحات الأشكال المغلقة المرسومة بمقياس رسم معين على الخرائط والمخططات ، ويعتبر هذا الجهاز من أكثر الوسائل شيوعاً ودقة وسرعة وسهولة في قياس مساحات الأراضي ذات الأشكال المتعرجة الحدود وغير المنتظمة . (صيام ، ١٩٨٣)

أنواع أجهزة البلانيمتر :

١ البلانيمتر الميكانيكي Mechanicale planimetere

٢ البلانيمتر الرقمي Digital planimetere



نوع قديم من أجهزة البلانيمتر

وجهاز البلانيمتر الرقمي يعتبر أسرع وأسهل استخداماً ، وأصبحت في الوقت الحالي ذات إمكانيات متعددة جعلتها مرغوبة أكثر .

بلانيمتر رقمي